微分積分Ⅰ　小課題第４回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

２年＿＿科＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１. 次の漸化式の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + 4$

a_{n+1} と a_n を α とおく

裏にもコメント

特性方程式：$\alpha = 3\alpha + 4$

$\alpha = -2$

$b_n = a_n - \alpha = a_n + 2$ とおくと，

$b_{n+1} = a_{n+1} + 2$

$= (3a_n + 4) + 2$

$= 3(a_n + 2)$

$= 3b_n$

また，$b_1 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$.

$\{b_n\}$ は初項5，公比3の等比数列．i.e. $b_n = 5\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = b_n - 2 = 5\cdot 3^{n-1} - 2$ 」

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n$

$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$

$= a_{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-1}$

$= \cdots$

$= a_1 + \underbrace{2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}}_{\text{等比数列の和}}$ ← $(n-1)$コの和

$= 1 + \dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 1 + 2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$ 」

２. 次の極限について、収束するならば極限値を、発散するならば、“∞”、“$-\infty$”、“振動” のいずれかを答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 」

イメージ　$\dfrac{1}{1000000} \fallingdotseq 0$

ものすごく大きい数で割るから，ほぼ0．

だから，nをどんどん大きくすると，

$\dfrac{1}{n^2}$ は0に限りなく近づく．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$ 」

$\dfrac{-1}{1},\ \dfrac{1}{2^2},\ \dfrac{-1}{3^2},\ \dfrac{1}{4^2},\ \dfrac{-1}{5^2},\ \cdots$

正負交互に出るが，絶対値はどんどん小さくなる．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1 - 2^n)$

$= -\infty$ 」

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

イメージ　2^{100000}

（ものすごくでかい）

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{4n}\right)\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{4n}\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

（$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ が有るときは（少なくとも）正しい）

$= 2\cdot 1$

$= 2$ 」

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (2n^3 - 3n^2)$

最高次数でくくる！

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} n^3\left(2 - \frac{3}{n}\right)$

$= \infty$ 」

イメージ　$\underset{\text{でかい}}{1000^3}\cdot(\underset{\text{ほぼ}2}{2 - 0.003}) = $（でかい）

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n - n\sqrt{n})$

$n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$（最高次数）

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)$

$= -\infty$ 」

$n = 10^4$

イメージ　$\underset{\text{でかい}}{10^4\cdot 10^2}\left(\underset{\text{ほぼ}-1}{\frac{1}{10^2} - 1}\right)$

$=$（負のでかい数）

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 2}{n^2}$

分母の最高次数のnで割る

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 2}{n^2}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{2}{n^2}}{1}$

$= \dfrac{5}{1} = 5$ 」

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 - 9n + 4}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{9}{n} + \frac{4}{n^2}}$

$= \dfrac{3}{1}$

$= 3$ 」

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 7n}{5n^4 + 3n + 2}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{7}{n^3}}{5 + \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^4}}$

$= \dfrac{0}{5}$

$= 0$ 」

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)(3n+1)}{n^2 + 2n + 3}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}$

$= \dfrac{2\cdot 3}{1}$

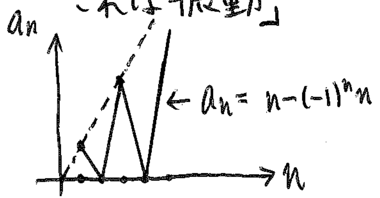
$= 6$ 」

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n - (-1)^n n)$

$n - (-1)^n n = \begin{cases} 2n & (n:\text{奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$

0と$2n$を行ったり来たり．

これは振動」



(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$

$\infty - \infty$ の不定形

逆有理化

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \times \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1) - (n^2-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$

$= 0$ 」

漸化式　$b_{n+1}=3b_n$ が等比数列になる理由：

① $n=1$：　$b_2=3b_1$

$n=2$：　$b_3=3b_2$

$n=3$：　$b_4=3b_3$

$\vdots$

$\xrightarrow{\text{これは}}$　$b_1 \xrightarrow{\times 3} b_2 \xrightarrow{\times 3} b_3 \xrightarrow{\times 3} b_4 \rightarrow \cdots$

ということ．等比数列ですね（公比3）

②
$$
\begin{aligned}
b_n &= 3b_{n-1} \\
&= 3^2 b_{n-2} && (\because\ b_{n-1}=3b_{n-2}) \\
&= 3^3 b_{n-3} && (\because\ b_{n-2}=3b_{n-3}) \\
&= \cdots \\
&= 3^{n-1} b_1 && (b_1=b_{n-(n-1)}) \\
&= 5\cdot 3^{n-1} && (\because\ b_1=a_1+2=3+2=5)
\end{aligned}
$$

略解

1. (1) $5\cdot 3^{n-1}-2$　(2) 2^n-1

2. (1) 0　(2) 0　(3) $-\infty$　(4) 2　(5) ∞　(6) $-\infty$　(7) 5　(8) 3　(9) 0　(10) 6　(11) 振動　(12) 0