

微分積分 I 小課題第 5 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

2 年 ____ 科 ____ 番 氏名 _____

1. 次の極限について、収束するならば極限値を、発散するならば、“ ∞ ”、“ $-\infty$ ”、“振動”のいずれかを答えよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2 + 1}{3n^3 + 4n^2 + 3n - 5} \quad \frac{\div n^3}{\div n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3}}$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n - \sqrt{n - 1}} \quad \frac{\div n}{\div n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$= 0$$

$\frac{1}{2^{1000000000}} \approx 0$
(すごく大きな数を割るから、かなり小さい)

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n - (-2)^n}{3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

$$= 2$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-10)^n}{5^n - 2} \quad \frac{\div 5^n}{\div 5^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

振動

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

$$= \infty$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n - (-5)^n}{2^n + (-3)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{5}{3}\right)^n}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

$$= -\infty$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^n}{(-2)^{n+1} - 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{-2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1}$$

$$= -1$$

$$\left(\frac{(-2)^{n+1}}{3^n} = \frac{-2 \cdot (-2)^n}{3^n} = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right) \rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ とかではない}$$

2. 次の無限級数の収束・発散を調べよ。収束するならば、和を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

裏へ

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}$$

裏へ

$$\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \text{ ㊤},$$

$$\text{部分和 } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \frac{4n+3}{3(4n+3)} - \frac{3}{3(4n+3)} \right\} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(4n+3)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \left(4 + \frac{3}{n} \right)}$$

$$= \frac{1}{12}$$

無限級数 S は部分和 S_n を求めて、極限を取る!

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$2(1) \quad \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{a}{4n-1} + \frac{b}{4n+3} \quad (*) \quad \text{と } a < 2,$$

$$= \frac{a(4n+3) + b(4n-1)}{(4n-1)(4n+3)} \\ = \frac{(4a+4b)n + (3a-b)}{(4n-1)(4n+3)}$$

← 恒等式 (n の)

係数を比較して,

$$\begin{cases} 4a+4b=0 \\ 3a-b=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}.$$

(したがって, (*))

$$\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4n+3} \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right),$$

と分かる。(部分分数展開 2nd)

必ず「マスター!!」

$$2(2) \text{ 部分和 } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+3} + \sqrt{2k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+3} + \sqrt{2k+1}} \times \frac{\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}} \quad \text{有理化!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}}{(2k+3) - (2k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1})$$

プラスをはずして
遠い同士が消える

$$= \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{9} - \sqrt{7}) + (\sqrt{11} - \sqrt{9}) + \dots \right. \\ \left. + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) + (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} [-\sqrt{3} + \sqrt{2n+3}]$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [-\sqrt{3} + \sqrt{2n+3}] = \infty$$