

微分積分 I 小課題第 6 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

級数の求む方

部分和 S_n を計算し、
極限を取る！

2 年 科 番 氏名

1. 次の等比級数について、収束するならばその和を、発散するならば、“ ∞ ”、“ $-\infty$ ”、“振動”のいずれかを答えよ。

(1) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ 公比 $\frac{1}{4}$

$\times \frac{1}{4}$ $\times \frac{1}{4}$ $\times \frac{1}{4}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1 \cdot \{1 - (\frac{1}{4})^n\}}{1 - \frac{1}{4}} \quad (\text{部分和})$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(2) $3 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \dots$ 公比 $-\frac{2}{3}$

$\times (-\frac{2}{3})$ $\times (-\frac{2}{3})$ $\times (-\frac{2}{3})$

$$S_n = \sum_{k=1}^n 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{3 \{1 - (-\frac{2}{3})^n\}}{1 - (-\frac{2}{3})}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{9}{5}$$

(3) $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$ 公比 $-\frac{3}{2}$

$\times (-\frac{3}{2})$ $\times (-\frac{3}{2})$ $\times (-\frac{3}{2})$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{1 \cdot \{1 - (-\frac{3}{2})^n\}}{1 - (-\frac{3}{2})}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は振動。

(4) $3 - \sqrt{3} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ 公比 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\times (-\frac{1}{\sqrt{3}})$ $\times (-\frac{1}{\sqrt{3}})$ $\times (-\frac{1}{\sqrt{3}})$

$$S_n = \frac{3 \cdot \{1 - (-\frac{1}{\sqrt{3}})^n\}}{1 - (-\frac{1}{\sqrt{3}})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - (-\frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$$\left| 1 < \sqrt{3} + 1, \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \right. \\ \therefore -1 < -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \text{ となり,} \\ \left. \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \right\} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{有理数})$$

2. 次の循環小数を分数の形に表わせ。

(1) $0.\dot{1}2 = 0.12121212\dots$

$= 0.12 \times \frac{1}{100}$
 $+ 0.0012 \times \frac{1}{100}$
 $+ 0.000012 \times \frac{1}{100}$
 $+ \dots$

初項 0.12
公比 $\frac{1}{100}$

$$S_n = \frac{0.12 \cdot \{1 - (\frac{1}{100})^n\}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0.12}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

$\therefore 0.\dot{1}2 = \frac{4}{33}$

(2) $3.\dot{1}4 = 3.14141414\dots$

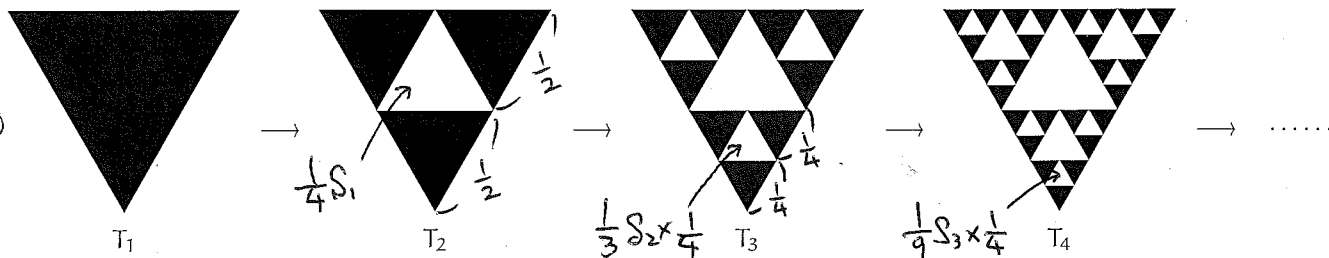
$= 3$
 $+ 0.14 \times \frac{1}{100}$
 $+ 0.0014 \times \frac{1}{100}$
 $+ 0.000014 \times \frac{1}{100}$
 $+ \dots$

初項 0.14
公比 $\frac{1}{100}$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{\infty} 0.14 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{k-1}$$

$$S_n = \frac{0.14 \cdot \{1 - (\frac{1}{100})^n\}}{1 - \frac{1}{100}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0.14}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{14}{99}$$

1 辺が 1 の正三角形 T_1 がある。 T_1 から各辺の中点を結んでできる正三角形をくり抜いた図形 T_2 を作る。次に、 T_2 の各辺の中点を結んで正三角形を作り、 T_2 よりくり抜いた図形 T_3 を作る。これを繰り返してできる図形 T_n (Sierpinski gasket という) の面積を S_n 、周の長さ (黒い三角形の周の長さの和) を l_n とするとき、以下の問いに答えよ。



(1) S_1 と S_2 、 S_2 と S_3 、 S_3 と S_4 との関係式を求め、 S_n と S_{n+1} との関係式を予想せよ。

(2) $l_2 - l_1$ 、 $l_3 - l_2$ 、 $l_4 - l_3$ を求め、 $l_{n+1} - l_n$ の n の式を予想せよ。

(3) $\{S_n\}$ 、 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ を求めよ。

$$(1) S_2 = S_1 - \underbrace{\frac{1}{4}S_1}_{T_1 \text{ の } \frac{1}{4} \text{ の 三角}} = \frac{3}{4}S_1, \quad S_3 = S_2 - \underbrace{\left(\frac{1}{3}S_2\right)}_{T_2 \text{ の 黒三角 三角の } \frac{1}{3}} \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}S_2$$

$$S_4 = S_3 - \left(\frac{1}{9}S_3\right) \times \frac{1}{4} \times 9 = \frac{3}{4}S_3$$

よって, $S_{n+1} = \frac{3}{4}S_n$ と予想できる. (数学的帰納法を示す)

$$(2) l_2 - l_1 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \quad (\leftarrow \text{白三角の周})$$

$$l_3 - l_2 = \frac{1}{4} \times 3 \times 3 = \frac{9}{4}$$

$$l_4 - l_3 = \frac{1}{8} \times 3 \times 9 = \frac{27}{8}$$

よって, $l_{n+1} - l_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ と予想できる.

$$(3) S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \{S_n\} \text{ は 初項 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 公比 } \frac{3}{4} \text{ の 等比数列.}$$

$$\therefore S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$l_1 = 1 \times 3 = 3.$$

$$l_n = l_{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$= l_{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \dots + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}}_{(n-1) \text{ 項}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 3 + \frac{\frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$= 3 + 3 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right]$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \infty.$$

T_n は n をとんとん大きくすると、
 いくらでも面積を小さくできる
 一方、周の長さはいくらでも大きくなる。

$$l_n = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \infty$$

$$(1) S_2 = \frac{4}{3}S_1, S_3 = \frac{4}{3}S_2, S_4 = \frac{4}{3}S_3 \quad (2) l_2 - l_1 = \frac{2}{3}, l_3 - l_2 = \frac{4}{9}, l_4 - l_3 = \frac{8}{27} \quad (3) S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$2. (1) \frac{33}{4} \quad (2) \frac{99}{311}$$

$$1. (1) \frac{4}{9} \quad (2) \frac{5}{9} \quad (3) \text{振動} \quad (4) \frac{2}{9-3\sqrt{3}}$$