微分積分Ⅰ　小課題第 17 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

$$\int \bigcirc\triangle' dx = \bigcirc\triangle - \int \bigcirc'\triangle dx$$

2年 ＿＿ 科 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 次の不定積分を計算せよ。

(1) $\int (2x-1)\sin x\,dx$　（$(\ )'$の形を作る）

$= \int (2x-1)(-\cos x)'\,dx$

$= (2x-1)(-\cos x) - \int (2x-1)'(-\cos x)\,dx$

$= -(2x-1)\cos x - \int (-2\cos x)\,dx$

$= -(2x-1)\cos x + 2\sin x + C$」

(2) $\int xe^x dx$

$= \int x(e^x)'\,dx$

$= xe^x - \int (x)'e^x\,dx$

$= xe^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x + C$」

(3) $\int \log(4x)\,dx$　$1 = (x)'$を掛ける

$= \int (x)'\log 4x\,dx$

$= x\log 4x - \int x\cdot(\log 4x)'\,dx$

$= x\log 4x - \int x\cdot\frac{1}{4x}\cdot(4x)'\,dx$

$= x\log 4x - \int dx = x\log 4x - x + C$」

(4) $\int \log(4x-1)\,dx$

$= \int \frac{1}{4}(4x-1)'\log(4x-1)\,dx$　（$(\log(4x-1))' = \frac{1}{4x-1}\cdot 4$）

$= \frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - \frac{1}{4}\int (4x-1)\cdot\frac{1}{4x-1}\cdot 4\,dx$

$= \frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - \int dx$

$= \frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - x + C$」

(5) $\int x^3\log x\,dx$

$= \int \left(\frac{1}{4}x^4\right)'\log x\,dx$　（$(\log x)'$）

$= \frac{1}{4}x^4\cdot\log x - \int \frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$

$= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4 + C$」

(6) $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}\,dx$　← 分数の形はまず log 型を疑え!!

$= \int \frac{(x^3+4x)'}{x^3+4x}\,dx$

$= \log|x^3+4x| + C$」

log型 $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)| + C$

(7) $\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}\,dx$　$(x^2+6x+5)' = 2x+6 = 2(x+3)$

$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+6x+5)'}{x^2+6x+5}\,dx$

$= \frac{1}{2}\log|x^2+6x+5| + C$」

(8) $\int \frac{x^2-x}{x+1}\,dx$　← 次数が（分母）≦（分子）なら割り算

	1	−1	0
−1		−1	2
	1	−2	2

$= \int \left(x-2+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\log|x+1| + C$」

頻出

$\int \frac{1}{x+a}dx = \log|x+a| + C$

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$

今日は裏にも問題があります！

(9) $\int \frac{x+17}{(x+2)(x-3)}\,dx$ ← 部分分数展開

$\frac{x+17}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ とおくと、

$= \frac{a(x-3)+b(x+2)}{(x+2)(x-3)}$ ← 通分

$= \frac{(a+b)x-3a+2b}{(x+2)(x-3)}$ ← xについて整理

係数比較

$\begin{cases} a+b=1 \\ -3a+2b=17 \end{cases}$

$\therefore a=-3,\ b=4$

(与式) $= \int \left(\frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x-3}\right)dx$

$= -3\log|x+2| + 4\log|x-3| + C$

(10) $\int \frac{x-1}{x^2-4x}\,dx = \int \frac{x-1}{x(x-4)}\,dx$

$\frac{x-1}{x(x-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4}$ とおくと、

$= \frac{a(x-4)+bx}{x(x-4)}$

$= \frac{(a+b)x-4a}{x(x-4)}$

係数比較

$\begin{cases} a+b=1 \\ -4a=-1 \end{cases}$

$\therefore a=\frac{1}{4},\ b=\frac{3}{4}$

$\therefore$ (与式) $= \int \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-4}\right)dx$

$= \frac{1}{4}\log|x| + \frac{3}{4}\log|x-4| + C$

(11) $\int \frac{\log x}{x}\,dx$ ← 置換積分 $t=\log x$ でもO.K. ($x=e^t$ も使う)

$= \int (\log x)'\log x\,dx$

$= (\log x)\cdot(\log x) - \int \log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x}\,dx$

左辺に移項して…

$\therefore 2\int \frac{\log x}{x}\,dx = (\log x)^2 + C$

$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$

(12) $\int x^2\cos x\,dx$

部分積分 ↓ $(x^2)'$

$= \int x^2(\sin x)'\,dx$

$= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$

$= x^2\sin x - \int 2x\cdot(-\cos x)'\,dx$ ↘ もう一度部分積分

$= x^2\sin x - \left(2x\cdot(-\cos x) - \int 2\cdot(-\cos x)\,dx\right)$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

(13) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ 実は log 型

$= \int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}\,dx$

$= \log(e^x+e^{-x}) + C$

(e^x も e^{-x} も常に正 なので絶対値記号不要)

(14) $\int (\log x)^2\,dx$

$= \int (x)'(\log x)^2\,dx$

$= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$

$= x(\log x)^2 - 2\int (x)'\log x\,dx$

$= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$

$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$

略解

1. (1) $-(2x-1)\cos x + 2\sin x + C$
(2) $xe^x - e^x + C$
(3) $x\log 4x - x + C$
(4) $\frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - x + C$
(5) $\frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4 + C$
(6) $\log|x^3+4x| + C$
(7) $\frac{1}{2}\log|x^2+6x+5| + C$
(8) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\log|x+1| + C$
(9) $\log\frac{(x-3)^4}{|x+2|^3} + C$
(10) $\frac{1}{4}\log|x(x-4)^3| + C$
(11) $\frac{1}{2}(\log x)^2 + C$
(12) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$
(13) $\log(e^x + e^{-x}) + C$
(14) $x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$