

微分積分の応用問題にもぜひ取り組んでください。難しく見えるかもしれませんが、計算は難しくありません。

2 年 ____ 科 ____ 番 氏名 _____

1. 【人口問題における数理モデル】

$N = N(t)$ を時刻 t におけるある地域の人口とする。ある時刻 t_0 と、 t_0 より少しだけ経った時刻 $t_0 + \epsilon$ ($\epsilon > 0$ はとても小さな数) との間に、人口は $N(t_0 + \epsilon) - N(t_0)$ だけ変化するため、人口の平均変化率は $\frac{N(t_0 + \epsilon) - N(t_0)}{(t_0 + \epsilon) - t_0}$ となる。したがって、変数 t の関数 $N(t)$ の $t = t_0$ における微分 $\frac{dN}{dt}(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(t_0 + \epsilon) - N(t_0)}{(t_0 + \epsilon) - t_0}$ は、時刻 t_0 における“瞬間の”人口の変化率(変化の速さ)と考えることができる。

Pierre-François Verhulst (1804年~1849年) は人口増加の仕方を説明する数理モデル^{*1}として次の方程式(微分を含むこのような方程式を微分方程式という)を提案した:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{\mu} \right) \quad (\gamma, \mu \text{ は正の定数}) \quad (*)$$

すなわち、方程式(*)を満たす関数 $N(t)$ が実際の人口の変化をよく表していると発表した。

(1) さて、方程式(*)を形式的に $\frac{\mu}{N(\mu - N)} dN = \gamma dt$ と変形し、両辺をそれぞれ変数 N, t について積分して、

$$\log \left(\frac{N}{\mu - N} \right) = \gamma t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (**)$$

となることを示せ。ただし、ここで $N, \mu - N > 0$ と仮定している。(ヒント: 部分分数展開)

形式的に、 $dN = \gamma N \left(1 - \frac{N}{\mu} \right) dt$ (これから左辺を N だけ、右辺を t だけの式にする)

$$\mu dN = \gamma N(\mu - N) dt$$

$$\frac{\mu}{N(\mu - N)} dN = \gamma dt$$

積分!! $\int \frac{\mu}{N(\mu - N)} dN = \int \gamma dt \quad - (*)$

部分分数展開

$$\frac{\mu}{N(\mu - N)} = \frac{a}{N} + \frac{b}{\mu - N} \quad \text{と } a < \gamma,$$

係数比較 $\rightarrow$

$$= \frac{a(\mu - N) + bN}{N(\mu - N)}$$

$$= \frac{(-a + b)N + a\mu}{N(\mu - N)}$$

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a\mu = \mu \end{cases}$$

$$\therefore a = 1, b = 1.$$

よって、(*)は

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\mu - N} \right) dN = \int \gamma dt$$

$$\log |N| - \log |\mu - N| = \gamma t + C$$

$$\log \left(\frac{N}{\mu - N} \right) = \gamma t + C$$

($\mu - N, N$ は正と仮定しているの2、
絶対値記号外れる)

裏にも問題があります!

^{*1} 数理モデルとは時間により変化する自然現象などを数式で記述し、その現象の振る舞いを模倣(近似)した“模型”のことをいう。モデルを作ることによって、その現象の本質を理解し、未来予測の目安を得ることができる。微分積分学の(ひいては数学の)ひとつの応用である。微分方程式(*)については、シャーレの中に入れられた細菌の増殖の仕方にもこのモデルを当てはめることができる。この方程式は生物の個体数の変動に関する基本的なモデルである。

(2) 時刻 $t=0$ のときの N の値を $N_0 = N(0) > 0$ とするとき、積分定数 C を N_0, γ, μ を用いて表わせ。

また、式 (**) を変形して

$$N = \frac{\mu}{1 + e^{-(\gamma t + C)}}$$

となることを示せ。

(1) の式に $t=0$ を代入:

$$\log \frac{N_0}{\mu - N_0} = C$$

$$\log \frac{N}{\mu - N} = \gamma t + C$$

$$\frac{N}{\mu - N} = e^{\gamma t + C}$$

$$\begin{aligned} r &= \log M \\ \Leftrightarrow M &= e^r \end{aligned}$$

$$N = (\mu - N) e^{\gamma t + C}$$

分子・分母に $e^{-(\gamma t + C)}$ を掛ける

$$(1 + e^{\gamma t + C}) N = \mu e^{\gamma t + C}$$

$$N = \frac{\mu e^{\gamma t + C}}{1 + e^{\gamma t + C}} = \frac{\mu}{e^{-(\gamma t + C)} + 1}$$

(3) この数理モデルによると、人口はどのように推移するのであろうか? $N = N(t)$ ($t \geq 0$) のグラフの概形を描け。

ただし、 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ に注意せよ。

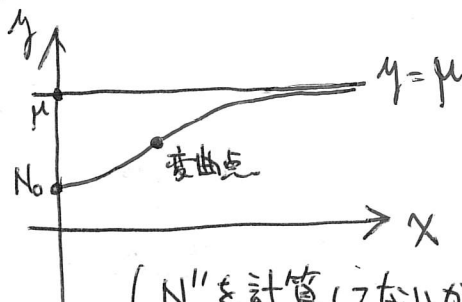
$$\begin{aligned} N' &= \frac{-\mu \cdot e^{-(\gamma t + C)} \cdot (-\gamma)}{(1 + e^{-(\gamma t + C)})^2} \\ &= \frac{\mu \gamma e^{-(\gamma t + C)}}{(1 + e^{-(\gamma t + C)})^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu}{1 + e^{-(\gamma t + C)}} = \mu$$

($N(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき $y = \mu$ に漸近)

t	0	...
N'		+
N	N_0	$\nearrow$

$N > 0, \mu - N > 0$
と仮定してこの式で、
 $N_0 < \mu, N_0 > 0$



(N'' を計算していないが、
実は変曲点がある)

← S字形の
曲線.