

微分積分 I 小課題第 20 回

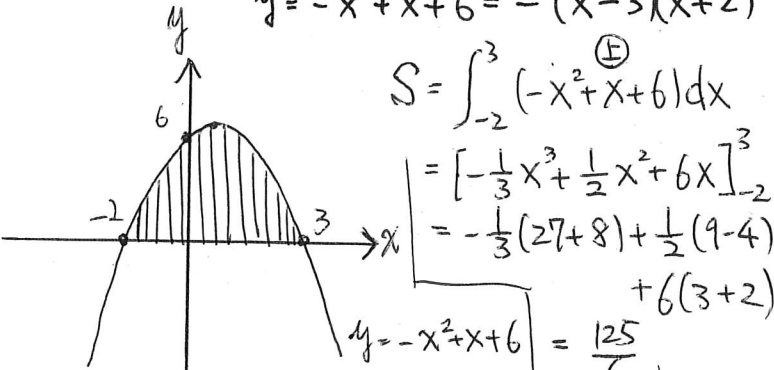
裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

2年 ____ 科 ____ 番 氏名 _____

1. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y = -x^2 + x + 6$ と x 軸

$$y = -x^2 + x + 6 = -(x-3)(x+2)$$



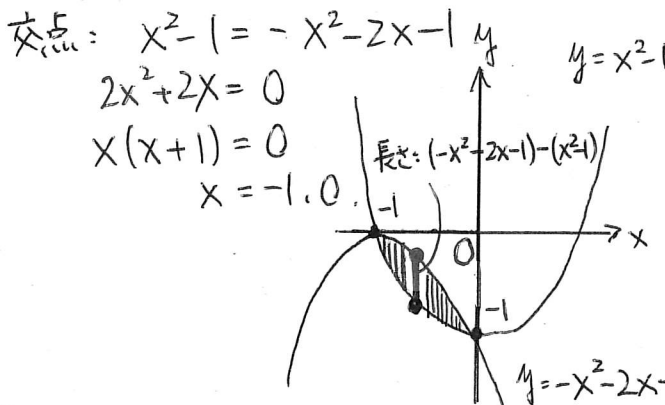
$$S = \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^3$$

$$= -\frac{1}{3}(27+8) + \frac{1}{2}(9-4) + 6(3+2)$$

$$= \frac{125}{6}$$

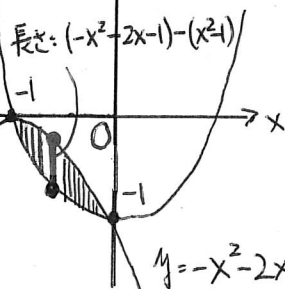
(3) 2 曲線 $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 - 2x - 1$



$$2x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x = -1, 0$$



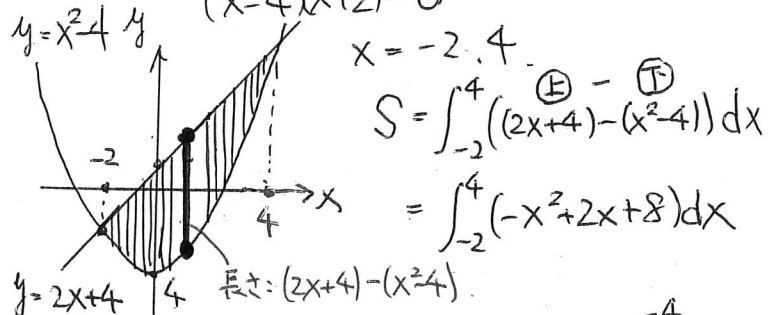
(2) 曲線 $y = x^2 - 4$ と直線 $y = 2x + 4$

$$\text{交点: } x^2 - 4 = 2x + 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x = -2, 4$$



$$S = \int_{-2}^4 ((2x+4) - (x^2-4)) dx$$

$$= \int_{-2}^4 (-x^2 + 2x + 8) dx$$

$$S = \int_{-2}^4 (-x^2 + 2x + 8) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_{-2}^4$$

$$= -\frac{1}{3}(64+8) + (16-4) + 8(4+2)$$

$$= 36$$

2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の交点の x 座標を求めよ。

$$\sin x = \cos 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \text{ または } \sin x = -1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

また、 $\sin x = -1$ を満たす x はない ($0 \leq x \leq \pi$ の範囲で)

$$\therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

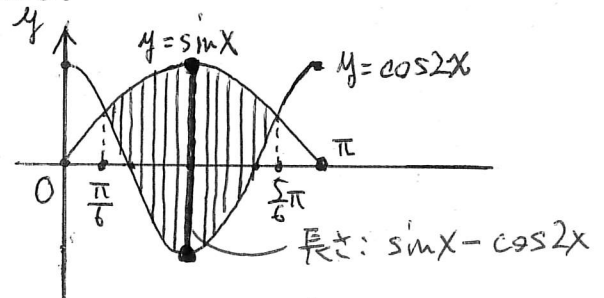
2倍角公式

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x \leftarrow$$

(2) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。



$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\sin x - \cos 2x) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= -\left(\cos \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

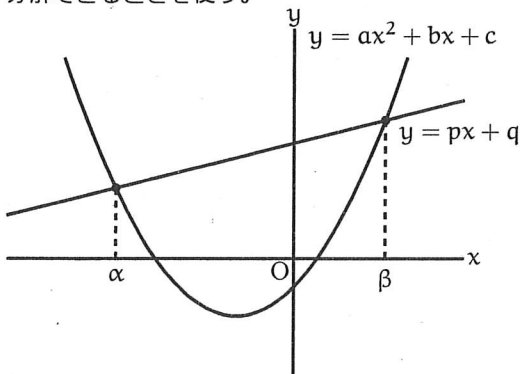
$$= -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

今日は裏にも問題があります！

3. 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = px + q$ が2点で交わるとする。この交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とするとき、 $y = ax^2 + bx + c$ と $y = px + q$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。また、1.(2) に適用して、正しいか確認してみよ。

ヒント: 方程式 $ax^2 + bx + c - (px + q) = 0$ は2解 α, β を持つから、 $ax^2 + bx + c - (px + q) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ と因数分解できることを使う。



$ax^2 + bx + c - (px + q) = 0$ の解は α, β なのて、
 $ax^2 + bx + c - (px + q) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ と
~~する~~ する。ここで、 $k > 0$ のとき、 $a > 0$ だと、
 左図のようになる。したがって、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 + bx + c - (px + q)) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} k(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= k \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 \right) (x - \beta) dx$$

$$= k \left[\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 \cdot (x - \beta) \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= k \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 \cdot 1 dx$$

$$= -k \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= -\frac{1}{6}k(\beta - \alpha)^3$$

$k < 0$ のときは $a < 0$ となり左図のようになる。

同様に、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} ((px + q) - (ax^2 + bx + c)) dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} k(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}k(\beta - \alpha)^3$$

1.(2) の場合、

$$(x^2 - 4) - (2x + 4) = x^2 - 2x - 8$$

$$= (x - 4)(x + 2)$$

$$\therefore k = 1, \alpha = -2, \beta = 4$$

$$\therefore S = \int_{-2}^4 (x - 4)(x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (4 - (-2))^3$$

$$= 36$$

右の計算から分かるように、

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \quad (\alpha < \beta)$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$3. k > 0 \text{ のとき、} S = \frac{1}{6}k(\beta - \alpha)^3, k < 0 \text{ のとき、} S = -\frac{1}{6}k(\beta - \alpha)^3$$

$$2. (1) \frac{\pi}{5}, \frac{6}{3\sqrt{3}} \quad (2) \frac{6}{5}\pi$$

$$1. (1) \frac{6}{125} \quad (2) 36 \quad (3) \frac{3}{1}$$