

微分積分 I 小課題第 22 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

2年 ____ 科 ____ 番 氏名 _____

1. 次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = \log x^3$ の接線で、原点を通るものを求めよ。

$$y = \log x^3 = 3 \log x.$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{x}.$$

接点を $(a, 3 \log a)$ とすると、接線の方程式は

$$y - 3 \log a = \frac{3}{a}(x - a)$$

原点を通る: $-3 \log a = \frac{3}{a} \cdot (-a)$

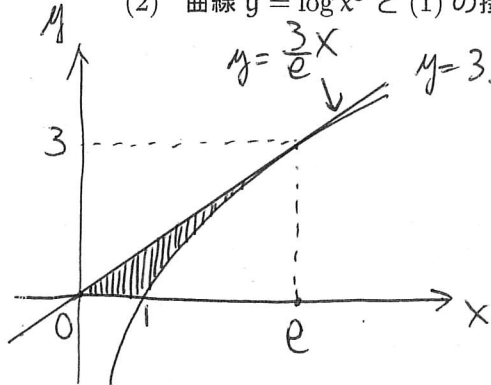
$$\log a = 1$$

$$a = e.$$

$$\therefore y - 3 = \frac{3}{e}(x - e)$$

$$y = \frac{3}{e}x$$

(2) 曲線 $y = \log x^3$ と (1) の接線および x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めよ。



$$y = \frac{3}{e}x$$

$$y = 3 \log x$$

$$S = \triangle_{\text{top}} - \triangle_{\text{bottom}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e \cdot 3 - \int_1^e 3 \log x dx$$

$$= \frac{3}{2}e - 3[x \log x]_1^e + 3 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{3}{2}e - 3e + 3[x]_1^e = \frac{3}{2}e - 3$$

$$S = \int_0^3 (e^{\frac{y}{3}} - \frac{e}{3}y) dy \quad \text{a.k.}$$

2. 方程式 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で表される曲線をアステロイド (astroid) という。この曲線の囲む面積を求めよ。ただし、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

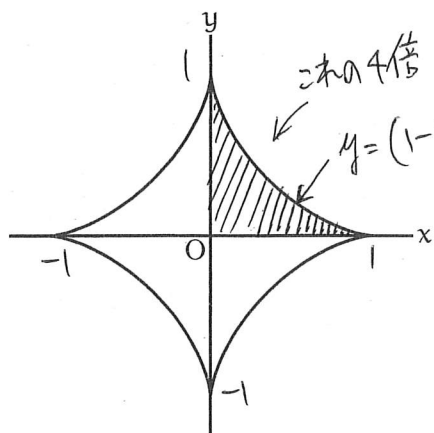
$$\left[\begin{array}{l} (2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1, \\ (2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 \end{array} \right]$$

となることを用いてよい (教科書 p.126 を見よ)。

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$y^{\frac{2}{3}} = 1 - x^{\frac{2}{3}}$$

$$y = \pm (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$



$$S = 4 \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta d\theta$$

$$= 12 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta \right)$$

$$= 12 \left(\frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{8} \pi$$

$$x = \sin^3 \theta \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

$$dx = 3 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

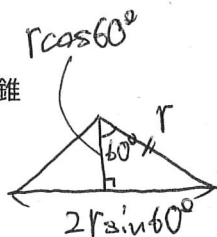
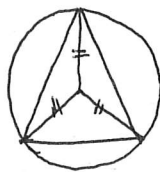
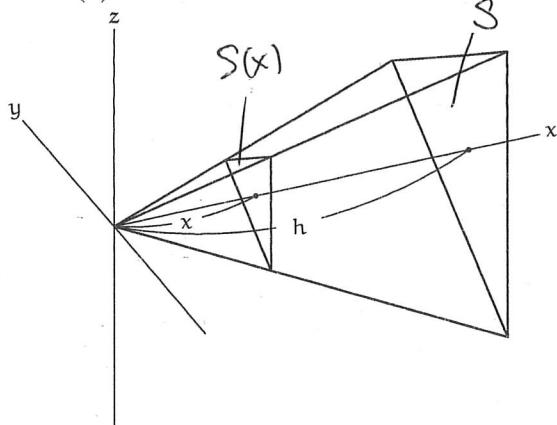
x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

今日は裏にも問題があります！

3. 次の立体の体積を積分法で求めよ。

(1) 半径 r の円に内接する正三角形を底面とし、高さが h の三角錐



$$S = 3 \times \frac{1}{2} \cdot 2r \sin 60^\circ \cdot r \cos 60^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$$

面積比:

$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

$$S(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 = x^2 : h^2$$

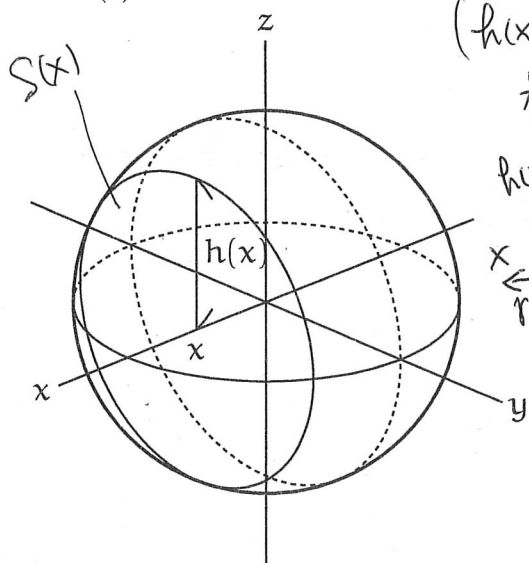
$$S(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{r^2}{h^2} x^2$$

$$\therefore V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{r^2}{h^2} x^2 dx$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h$$

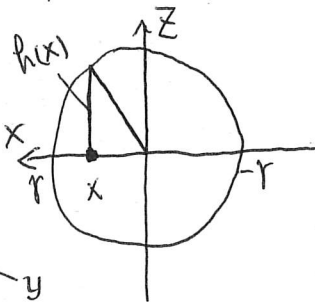
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 h$$

(2) 半径が r の球面



($h(x)$ が分かれば $S(x) = \pi h(x)^2$ が分かる)

横から見ると



$$h(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\therefore S(x) = \pi h(x)^2 = \pi (r^2 - x^2)$$

$$V = \int_{-r}^r S(x) dx$$

$$= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r$$

$$= \pi r^2 (r + r) - \frac{1}{3} \pi (r^3 + r^3)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

3. (1) $\frac{\sqrt{3}}{4} h r^2$ (2) $\frac{3}{4} \pi r^3$

2. $\frac{8}{3} \pi$ 以下: $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ で、 $x = \sin^3 \theta$ で変数変換する。

(1) $y = \frac{e}{x}$ (2) $S = \frac{2}{e} - 3$

1. 以下: 接点を $(a, \log a^3)$ とおく。また、 $\log M^T = r \log M$