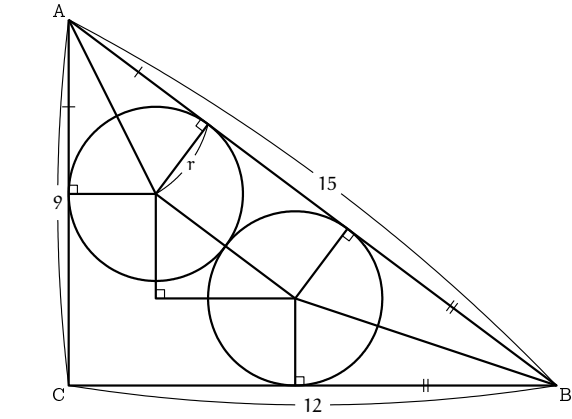


★ いろいろな算額 ― ヒントと解 ―

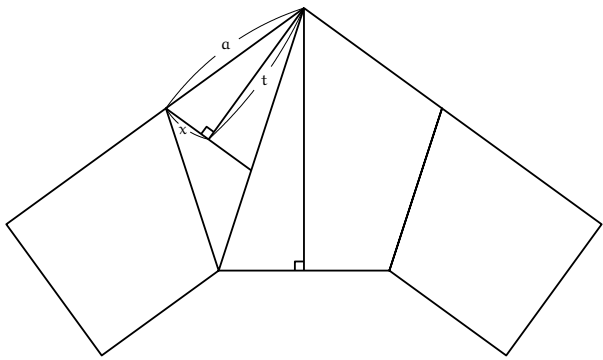


解: $\frac{30}{7}$ 寸

ヒント: 円の半径を r とおく。図の大きな三角形の各辺の長さに関して、印のついている 2 辺の長さと r が未知の連立方程式ができる。一般の直角三角形 ABC に内接する 2 円についても、円の直径 R を辺の長さで表してみると、

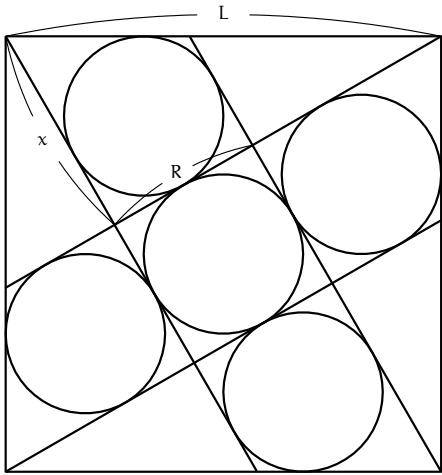
$$R = \frac{c(a + b - c)}{a + b}$$

となる。 R は (単一の) 内接円の直径の $\frac{c}{a + b}$ 倍ともわかる (下の Lemma 参照のこと)。



解: $\sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}}$ 寸

ヒント: 図の辺の長さを x とおき、正五角形の一辺を a 、紙の幅を t とするとき、三角形の相似と三平方の定理を使って a を t で表す。



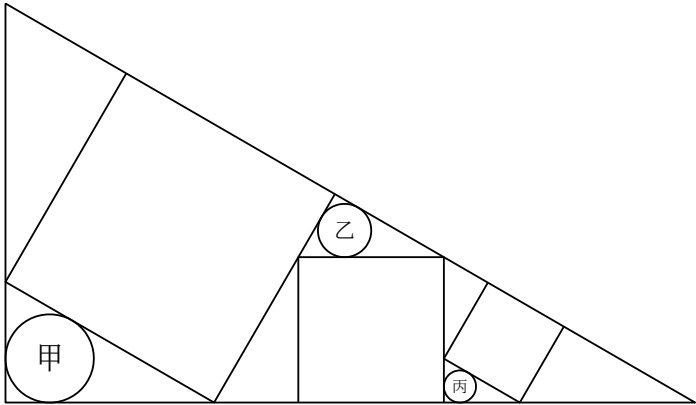
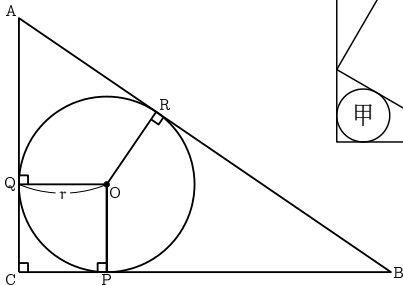
解: $R = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} L$

ヒント: 図の辺の長さを x とおき、円の直径を R 、正方形の一辺を L とおく。次の補助定理を使うと、すぐに解がわかる。和算ではこの定理をよく使っていたようだ。

Lemma

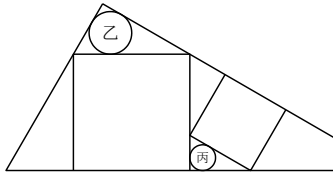
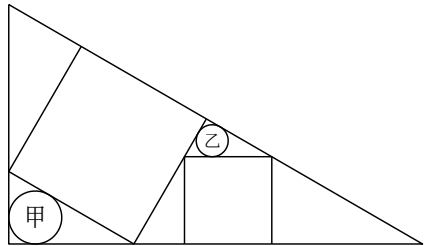
直角三角形に円が内接しているとき、その直径を R とすると、次が成り立つ:

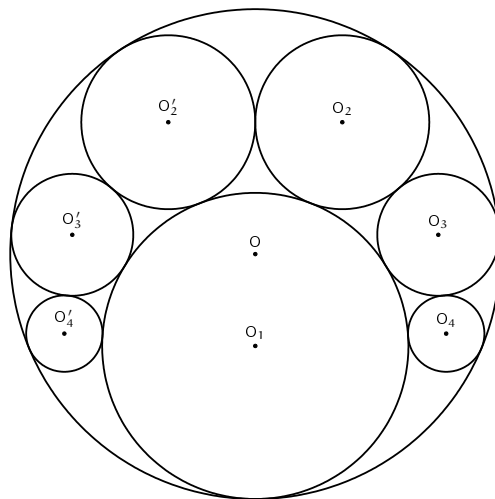
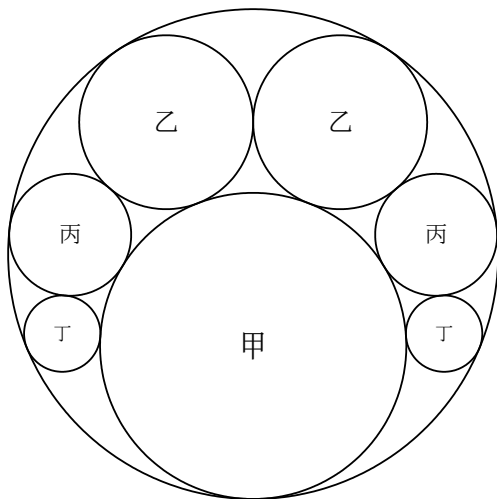
$$R = BC + CA - AB$$



解: 6 寸

ヒント: 下図のように分けると、相似である。





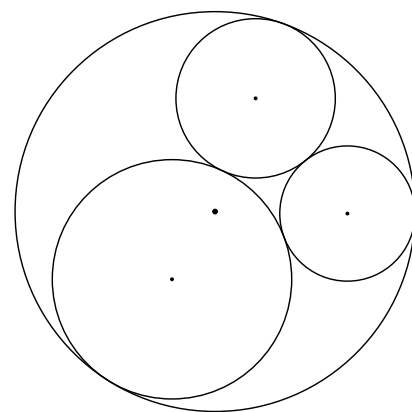
解: 乙円 6 寸、丙円 4 寸、丁円 2 寸 4 分

ヒント: 大円を O 、以下大きい順に O_1, O_2, O_3, O_4 とし、各半径を r, r_1, r_2, r_3, r_4 とする。まずは、4 円 O, O_1, O_2, O_2' に対して、デカルトの円定理を適用せよ。

デカルト Descartesの円定理

右図のように、互いに内接する 4 つの円があるとき、それらの半径を大きい順に r_1, r_2, r_3, r_4 とおくと、次の等式が成り立つ:

$$\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_1} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} \right)$$



参考文献等

- 算法勝負! 「江戸の数学」に挑戦、山根誠司著、講談社ブルーバックス
- 御菓子司たばや <http://www.sangakumonaka.com/>