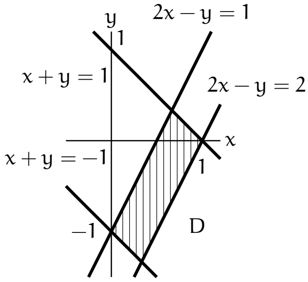
小テスト第 8 回解答　2015/12/16

1.　(1) $\displaystyle\iint_D (x-y)\,dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\mid 1\le 2x-y\le 2,\ |x+y|\le 1\right\}$

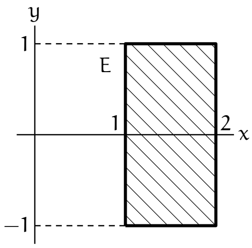


領域 D を図示すると左のようになる。そのまま縦線形として計算するのは大変なので、変数変換してみる。
$u=2x-y,\ v=x+y$ とおくと、

$$x=\frac{u+v}{3}, \qquad y=\frac{-u+2v}{3}$$

このとき、

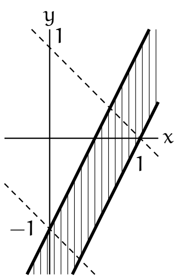
$$\det J(u,v)=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\neq 0$$



$E=\left\{(u,v)\mid 1\le u\le 2,\ |v|\le 1\right\}$ とおくと、

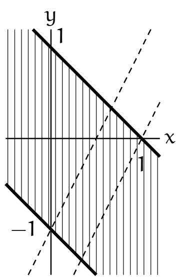
$$\begin{aligned}\iint_D (x-y)\,dxdy &= \iint_E \frac{2u-v}{3}\cdot\frac{1}{3}\,dudv \qquad x-y=\frac{2u-v}{3}\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_1^2 \frac{2u-v}{9}\,du\right)dv\\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{u^2-uv}{9}\right]_1^2 dv\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}v\right)dv=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

D の図示については、



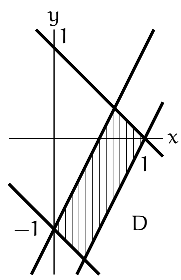
$1\le 2x-y\le 2$

と



$-1\le x+y\le 1$

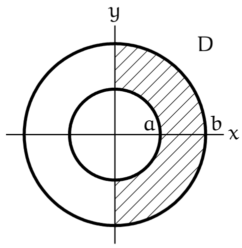
との共通部分が



領域 D

であると考えればよい

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \mid a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\ x \ge 0\right\}\ (0 < a < b)$



領域 D を図示すると、左図のようになる。これも縦線形として計算するのもいいが、円に関係した図形は極座標変換と相性がよい場合が多い。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと、図より、r の動く範囲は $a \le r \le b$ であり、θ の動く範囲は $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ となる。また、$\det J = r \ne 0$ となる。

したがって、$E = \left\{(r,\theta) \mid a \le r \le b,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ とおくと、

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E \frac{1}{r^2}\cdot r\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^b \frac{1}{r}\,dr\right)d\theta = \pi(\log b - \log a)$$

ここで、領域 E の中で r, θ はそれぞれ独立した範囲を動くので、

$$\iint_E \frac{1}{r^2}\cdot r\,drd\theta = \int_a^b \frac{1}{r}\,dr \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,d\theta$$

と計算するほうが少し効率的です。ていねいに書けば、

$$\iint_E \frac{1}{r^2}\cdot r\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^b \frac{1}{r}\,dr\right)d\theta = \int_a^b \frac{1}{r}\,dr \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,d\theta$$

$\alpha := \displaystyle\int_a^b \frac{1}{r}\,dr$ は定数なので、θ に関する積分記号の前に出ます:

$$\int_a^b \alpha f(\theta)\,d\theta = \alpha\int_a^b f(\theta)\,d\theta$$

ただし、$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\right\}$ のような場合に、うっかり

$$\iint_D x\,dxdy = \int_0^1 x\,dx \times \int_0^x dy \qquad \text{(間違い)}$$

としてしまわないこと！